На правах рукописи

Лукин Михаил Александрович

ПОЛУКОЛЬЦЕВЫЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ КОЛЬЦА И ПОЛУТЕЛА

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре высшей математики
физико-математического факультета
Вятского государственного гуманитарного университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор ВЕЧТОМОВ Евгений Михайлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор КОЖУХОВ Игорь Борисович
кандидат физико-математических наук,
доцент АБЫЗОВ Адель Наилевич

Ведущая организация: Ульяновский государственный университет

Защита состоится «__»__________2009 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, конференц-зал библиотеки им. Н. И. Лобачевского КГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «__»__________2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент А. И. Еникеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследования, проведенные в диссертации, посвящены одному из специальных классов полуколец – полукольцам с единицей, являющимся объединением кольца и полутела.

Теория полуколец возникла в 50-е годы XX столетия. В настоящее время она находит применения в дискретной математике, компьютерной алгебре, идемпотентном анализе, теории оптимального управления и других разделах математики[1,2].

Пример полукольца всех идеалов кольца с операциями сложения и умножения идеалов можно найти уже в работе Дедекинда[3] 1894 года.

Впервые строгое определение полукольца дано Вандивером[4].

Полукольцом называется алгебра $\langle S,+,\cdot,0\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ такая, что $\langle S,+,0\rangle$ – коммутативный моноид, $\langle S,\cdot\rangle$ – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, $0\cdot s = s\cdot 0 = 0$ для любого элемента s из S.

Класс полуколец содержит такие хорошо известные алгебраические объекты как ассоциативные кольца, дистрибутивные решетки с наименьшим элементом, ряд числовых систем, а также полутела с нулем.

Полукольцо S с ненулевой единицей 1 называется полутелом с нулем, если множество его обратимых по умножению элементов совпадает с $S\backslash\{0\}$ и S не является кольцом. Любое полутело с нулем будет антикольцом, то есть удовлетворяет квазитождеству $a+b=0 \Rightarrow a=0$. Если из полутела с нулем S исключить нуль, то получим алгебраическую структуру $\langle S\backslash\{0\},+,\cdot\rangle$, которую будем называть *полутелом.*

---

[1] Маслов, В. П. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении [текст] / В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов – М.: Наука, 1994 – 144 с.

[2] Hebisch, U. Semirings. Algebraic theory and applications in computer science [text] / U. Hebisch, H. J. Weinert // World Scientific Publishing. Singapore, 1998.

[3] Dedekind, R. Uber die Theorie ganzen algebraischen Zahlen [text] / R. Dedekind // Suplement XI to P.G. Lejeune Dirichet: Vorlesungen Uber Zahlentheorie, 4 Ansfl., Druck und Verlag, Braunschweig, 1894.

[4] Vandiver, H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold [text] / H. S. Vandiever // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – V. 40. – №12.– P. 914–920

Структурная теория полутел в последнее время активно развивается и является самостоятельной. Ей посвящены работы А. Н. Семенова[5], А. В. Чераневой[6], Е.М. Вечтомова и А.В. Чераневой[7], полутела исследовались в диссертациях А. В. Ряттель[8] и И. И. Богданова[9]. Важные результаты в теории полутел получены в диссертации А.В. Чераневой[10].

Для получения новых классов полуколец естественным является исследование полуколец, сводящихся к указанным типам полуколец: кольцам, ограниченным снизу дистрибутивным решеткам и полутелам с нулем. В предложении (12.15) книги Голана[11] дается описание полуколец, являющихся подпрямым произведением некоторых кольца и дистрибутивной решетки. В работе Е. М. Вечтомова, А. В. Михалева и В. В. Чермных[12] и исследованиях О. В. Старостиной[13] изучаются абелево-регулярных положительные полукольца, строение которых однозначно определяется дистрибутивной решеткой идемпотентов $L(S)$, полутелом обратимых элементов $U(S)$ и каноническим антигомоморфизмом $L(S) \to ConU(S)$, где $ConU(S)$ – решетка конгруэнций полутела $U(S)$.

Важным подходом к исследованию структуры полуколец является пред-

[5] Семенов, А. Н. О решетке конгруэнций полутел [текст]/ А. Н. Семенов // Вестник ВятГГУ. – 2003. – №9. – С. 92–95

[6] Черанева, А. В. О конгруэнциях на полутелах [текст] / А. В. Черанева // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 4 (16). – С. 164–171

[7] Вечтомов, Е. М. К теории полутел [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63. – Вып. 2 – С. 161–162

[8] Ряттель, А. В. Положительно упорядоченные полутела: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06 защищена 17. 03. 2003 / А. В. Ряттель. – Киров: ВятГГУ, 2002. – 89 с.

[9] Богданов, И. И. Полимиальные соотношения в полукольцах: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 20. 02. 2004 / И. И. Богданов. – МГУ. – М., 2004. – 72 с.

[10] Черанева, А. В. Ядра и пучик полутел: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 4. 12. 2008 / А. В. Черанева. – Киров: ВятГГУ, 2008. – 95 с.

[11] Golan, J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, 1992. – V. 54. – 318 p.

[12] Вечтомов, Е. М., Абелево-регурярные положительные полукольца [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Михалев, В. В. Чермных // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1997. – Т. 20. – С. 282–309

[13] Старостина, О. В. Абелево-регулярные положительные полукольца: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 29. 10. 2007 / О. В. Старостина. – Киров: ВятГГУ, 2007. – 90 с.

ставление полуколец в виде расширений полуколец из более хорошо изученных классов. Представлениям полутел в виде расширений сократимых полутел при помощи идемпотентных полутел посвящены работы А. Н. Семенова[14] и И. И. Богданова[15].

Полукольцо S с единицей $1 \neq 0$ назовем 0-1-*расширением* полукольца K и полукольца P, возможно не имеющего нуля, при помощи полукольца T, если на S существует конгруэнция ρ такая, что $S/\rho \cong T$, $[0]_\rho \cong K$ и $[1]_\rho \cong P$.

Мы рассматриваем 0-1-расширения кольца и полутела, в которых роль класса нуля конгруэнции играет некоторое кольцо R, а роль класса единицы – некоторое полутело U. Для выяснения структуры таких 0-1-расширений необходимым является изучение полукольцевых дизъюнктных объединений.

Полукольцо S с единицей 1 назовем *полукольцевым дизъюнктным объединением* кольца R и полутела U и обозначим $R\dot{\cup}U$, если оно является объединением своих непересекающихся подмножеств $r(S) = \{r \in S : \exists t \in S, t + r = 0\}$ и $U(S) = \{u \in S : \exists v \in S, uv = vu = 1\}$, причем $r(S) \cong R$ и $U(S) \cong U$.

Цель работы. Исследовать алгебраическое строение полукольцевых дизъюнктных объединений $S = R\dot{\cup}U$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Строение полукольцевых объединений кольца и полутела сведено к строению их полукольцевых дизъюнктных объединений (замечания 3.6, 3.7).

2) Приведены определяющие свойства колец, для которых существуют нетривиальные дополнения до полукольцевого дизъюнктного объединения (теорема 4.1).

3) Дано характеристическое свойство полутел, для которых существует нетривиальное дополнение до полукольцевого дизъюнктного объединения

[14] Семенов, А. Н. О строении полутел [текст] / А. Н. Семенов // Вестник ВятГГУ. – 2003. – №8. – С. 105–107

[15] Богданов, И. И. Об аддитивной структуре полутел [текст] / И. И. Богданов // Вест. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. – 2004. – №21. – С. 48–50

(теорема 5.1).

4) Для подходящих колец построены всевозможные полутела, допускающие полукольцевые дизъюнктные объединения с этими кольцами (свойства 4.1, 4.8, предложения 4.1, 4.2, теорема 4.4).

5) Для незероидных полутел построены все кольца, допускающие с ними полукольцевые дизъюнктные объединения (теорема 5.2, предложение 5.2).

6) Приведен пример кольца R и полутела U, для которых существуют неизоморфные полукольцевые дизъюнктные объединения (предложение 6.2, теорема 6.1).

7) Доказана модулярность решетки конгруэнций полукольцевого дизъюнктного объединения (предложение 8.2). Показано, что дистрибутивность решетки идеалов кольца R и дистрибутивность решетки конгруэнций полутела U влекут дистрибутивность решетки конгруэнций полукольца $R\dot{\cup}U$(предложение 8.3).

Методы исследования. В диссертации используются понятия и методы теории полуколец, теории колец и модулей, теории решеток, универсальной алгебры.

Теоретическое и прикладное значение. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях в структурной теории полуколец. Кроме того, они могут найти свое применение в качестве материала для специальных курсов в высших учебных заведениях.

Апробация диссертации. Результаты диссертационного исследования докладывались на семинаре "Кольца и модули" кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (февраль 2006 г.), на научном семинаре кафедры алгебры и математической логики Казанского государственного университета (апрель 2007 г., сентябрь 2008 г.), на итоговых научных конференциях ВятГГУ и на научном алгебраическом семинаре ВятГГУ (2005–2008 г.г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ (список публикаций приведен в конце автореферата), из которых три в соавторстве с Е.М. Вечтомовым.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 9 параграфов, списка литературы и предметного указателя. Общий объем диссертации 92 страницы.

Обзор содержания работы

Во **введении** обоснована актуальность темы, формулируются задачи исследования, приводится аннотация основных результатов диссертации.

Глава 1 посвящена общей теории полуколец. В первом параграфе даются исходные понятия и примеры полуколец, используемые в диссертации. Во втором параграфе приводятся известные факты из теории расширений полуколец, а также следующие новые результаты о 0-1-расширениях полуколец.

Предложение 2.1. *Пусть некоторое полукольцо S является объединением полутела U и кольца R и $R \cap U = \varnothing$. Тогда S есть* 0-1-*расширение кольца R и полутела U при помощи двухэлементной цепи L_2.*

Предложение 2.2. *Для кольца R и полутела U эквивалентны следующие условия:*

1) существует 0-1-*расширение R и U при помощи некоторой (равносильно, любой) неодноэлементной ограниченной дистрибутивной решетки L;*

2) существует 0-1-*расширение R и U при помощи L_2.*

Рассмотрим 0-1-расширение S кольца R и полутела U. Пусть ρ – такая конгруэнция на S, что $[0]_\rho \cong R, [1]_\rho \cong U$. Тогда подмножество $[0]_\rho \cup [1]_\rho$ – подполукольцо в S. При этом строение S существенно зависит от строения $[0]_\rho \dot{\cup} [1]_\rho$. Таким образом, естественной задачей является изучение строения полукольцевых дизъюнктных объединений $R \dot{\cup} U$. Строение полукольцевых объединений S, возможно без 1, кольца R и полутела U также можно свести к полукольцевым дизъюнктным объединениям. Этому вопросу посвящен параграф 3, в котором последовательно получено:

Замечание 3.1. Подмножество $R_U = 1_U R 1_U$ является подкольцом в R. Причем R_U – наибольшее среди подколец R, элементы которых не меняются при умножении на 1_U слева и справа.

Замечание 3.5. Отображение $f : R \to R, r \mapsto 1_U r 1_U$, является кольцевым гомоморфизмом, причем $Ker f \subseteq Ann R$, $Ker f \cap R_U = \{0\}$, $\forall u \in U, \forall r \in R$, $uf(r) = f(ur)$, и $f(r)u = f(ru)$.

Замечание 3.6. Кольцо R изоморфно кольцу $R_U \times Ker f$, рассматриваемому с покоординатным сложением и умножением $(r_1, k_1)(r_2, k_2) = (r_1 r_2, 0)$.

Замечание 3.7. Кольцо K тогда и только тогда изоморфно $Ker f$ в некотором полукольце $S = R \dot{\cup} U$, когда оно является прямым произведением трех своих идеалов J_1, J_2, J, каждые два из которых пересекаются по нулевому элементу, J_1 является левым модулем над U, J_2 – правым модулем над U, умножение на K – нулевое. При этом в полукольце $(J_1 \times J_2 \times J) \cup U$ выполняются равенства $u + (j_1, j_2, j) = u$, $u(j_1, j_2, j) = (uj_1, 0, 0)$, $(j_1, j_2, j)u = (0, j_2 u, 0)$.

В **главе 2** приводятся характеристические свойства колец и полутел, входящих в полукольцевые дизъюнктные объединения с нетривиальными полутелами и кольцами соответственно. Для каждого подходящего кольца построены все допустимые полутела (параграф 4), и наоборот, для каждого подходящего полутела построены все допустимые кольца (параграф 5).

Кольцо R называется *радикальным по Джекобсону*, если оно совпадает со своим радикалом Джекобсона. Это означает, что операция "круговой композиции" $r * s = r + s + rs$ в R является групповой, с нейтральным элементом 0. Другими словами, в кольце R для любого элемента r существует единственный элемент s такой, что $r + s + rs = 0$.

Теорема 4.1. *Для произвольного кольца R эквивалентны следующие условия:*

1) существует полукольцо, являющееся полукольцевым дизъюнктным объединением кольца R и некоторого полутела U;

2) R – радикальное по Джекобсону кольцо, аддитивная группа которого является делимой абелевой группой без кручения.

Для построения множества полутел U, входящих в полукольцевое дизъюнктное объединение с данным кольцом R, используется техника модульных эндоморфизмов.

Кольцом *двусторонних модульных эндоморфизмов* кольца R будем называть множество $D(R) \subseteq EndR_R \times End_R R$ пар (f, g) эндоморфизмов таких, что для любых элементов r_1, r_2 из R выполняется $(r_1 f)r_2 = r_1(gr_2)$, с операциями покоординатного поточечного сложения (сумма $(f, g) + (p, q) = (f+p, g+q)$ действует справа на элементы $r \in R$ как $f+p$, а слева как $g+q$) и покоординатной композицией $(f, g) \cdot (p, q) = (f \circ p, g \circ q)$.

Свойство 4.1. Отношение *одинакового действия* $\sim$ на полутеле U, определяемое соотношением $u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow \ (ru_1 = ru_2 \text{ и } u_1 r = u_2 r) \ \forall r \in R$, является конгруэнцией на U.

Свойство 4.8. Полутело $U/\sim$ и кольцо R состоят в полукольцевом дизъюнктном объединении.

Далее, в кольце $D(R)$ определяются все полутела, играющие роль факторполутел $U/\sim$.

Подполутело P кольца $D(R)$ назовем *ассоциированным с элементами* R, если для любых $u_1, u_2 \in P$, $r \in R$ выполняется равенство $(u_1 r)u_2 = u_1(ru_2)$.

Выберем в $D(R)$ полутело $H = P + R/AnnR$, где полутело P ассоциировано с элементами R и имеет своей единицей единицу кольца $D(R)$. Пусть H^* – полутело с заданным сюрьективным гомоморфизмом $f : H^* \to H$.

Имеют место следующие утверждения:

Предложение 4.1. *Множество $H^* \times R$ с операциями $(h_1, r_1) + (h_2, r_2) = (h_1 + h_2, r_1 + r_2)$ и $(h_1, r_1)(h_2, r_2) = (h_1 h_2, f(h_1)r_2 + r_1 f(h_2) + r_1 r_2)$, где $f(h_1)r_2$ и $r_1 f(h_2)$ – соответственно результаты действия модульных автоморфизмов $f(h_1)$ на r_2 слева и $f(h_2)$ на r_1 справа, является полутелом.*

Предложение 4.2. *Полученное полутело $H^* \times R$ образует полукольцевое* *дизъюнктное объединение с R, то есть $R\dot{\cup}(H^* \times R)$.*

Замечание 4.2. Полутело $(H^* \times R)/\sim$ входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с R, более того, $(H^* \times R)/\sim\cong H$ и при заданных на $R\dot{\cup}(H^* \times R)$ операциях действие элементов $H^* \times R$ – это в точности действие элементов H.

Теорема 4.4. *Полутело $(H^* \times R)/\approx$, где $\approx$ – такая конгруэнция на $(H^* \times R)$, что $\approx\subseteq\sim$, входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с R. Обратно, любое полутело, входящее в дизъюнктное полукольцевое объединение с R, изоморфно $(H^* \times R)/\approx$ для некоторого полутела H^*, гомоморфным образом которого является полутело $H = P+R/AnnR$, где P – подполутело в $D(R)$, P ассоциировано с элементами кольца R и $\approx\subseteq\sim$.*

В параграфе 5 дается абстрактная характеристика полутел, входящих в полукольцевое дизъюнктное объединение с нетривиальным кольцом. Для каждого полутела строится класс всех колец, входящих с ним в полукольцевое дизъюнктное объединение.

Полутело называется *зероидным*, если в нем существуют элементы a, b такие, что $a = a + b$.

Теорема 5.1. *Полутело U входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с некоторым ненулевым кольцом тогда и только тогда, когда оно не является зероидным.*

Вводится понятие кольцевого ядра полутела U, при помощи которого описываются всевозможные кольца R, входящие в полукольцевое дизъюнктное объединение $S = R\dot{\cup}U$ с условием:

$$\forall a, b \in S \quad a + b = a \Rightarrow b = 0. \qquad (*)$$

Ядро K полутела U назовем *кольцевым*, если выполняются следующие свойства: 1) $\forall u \in U \forall k \in K \exists t \in K \quad ku + 1 = u + t$, 2) $\forall u \in U \forall k_1, k_2 \in K (k_1 + u = k_2 + u \Rightarrow k_1 = k_2.)$

Рассмотрим канонический гомоморфизм $h : U \to T(U)$ из полутела U в его кольцо разностей $T(U)$, действующий по правилу $h : u \mapsto \overline{(u + 1, u)}$ для всех $u \in U$.

Лемма 5.1. *Любое кольцевое ядро инъективно вкладывается в $T(U)$ при гомоморфизме h.*

Предложение 5.1. *Если K – кольцевое ядро полутела U, то $h(K) = 1 + I$ для некоторого идеала I кольца $T(U)$ такого, что имеет место $I\dot{\cup}U$ с условием $(*)$.*

Теорема 5.2. *Кольцо R входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с данным полутелом U с условием $(*)$ тогда и только тогда, когда оно изоморфно идеалу $1 - h(K)$ кольца разностей $T(U)$ для некоторого кольцевого ядра K.*

Для любого полукольцевого дизъюнктного объединения $S = R\dot{\cup}U$ можно получить $(R/J(S))\dot{\cup}U$ с условием $(*)$. Это позволяет описать множество всех колец, входящих в некоторое полукольцевое дизъюнктное объединение с данным полутелом U:

Лемма 5.2. *Для полукольцевого дизъюнктного объединения $S = R\dot{\cup}U$ (возможно без условия $(*)$) множество $J(S) = \{r \in R : \exists u \in U u + r = u\}$ является идеалом кольца R, выдерживает умножение на элементы из полутела U, и его аддитивная группа является делимой.*

Предложение 5.2. *Пусть $S = R\dot{\cup}U$ для нетривиальных кольца R и полутела U. Тогда существует $(R/J(S))\dot{\cup}U$ с условием $(*)$, и существует $S_1 = R\dot{\cup}U$, в котором $J(S_1) = \{r \in R : \forall u \in U \quad u + r = u\}$ и кольца $R/J(S_1)$ и $R/J(S)$ изоморфны.*

Предложение 5.2 показывает на возможность существования неизоморфных полукольцевых дизъюнктных объединений для фиксированных кольца и полутела. Этому вопросу посвещен параграф 6.

Предложение 6.2. *Прямое произведение $U \times F$, где F – произвольное полутело и $R\dot{\cup}U$, входит в полукольцевое дизъюнктное объединение с R.*

Теорема 6.1. *Существуют два неизоморфных полукольцевых дизъюнктных объединения некоторых кольца R и полутела U.*

В параграфе 7 рассматриваются два гомоморфных образа полукольцевых дизъюнктных объединений $S = R\dot{\cup}U$.

Для каждого дизъюнктного объединения $R\dot{\cup}U$ построен полукольцевой гомоморфизм f, при котором $f(R)\dot{\cup}f(U)$, кольцо $f(R)$ не имеет аннулирующих элементов кроме нуля, $f(U)$ – сократимое полутело, в котором все элементы по разному действуют умножением на $f(R)$.

Попостроен другой гомоморфизм g, для которого $g(R)\dot{\cup}g(U)$. При этом имеют место следующие утверждения: в кольце $g(R)$ выполняется импликация $r_1rr_2 = 0 \Rightarrow r = 0$; $g(U)$ – сократимое полутело, в котором все элементы по разному действуют умножением на $g(R)$; если два модульных эндоморфизма кольца $g(R)$ действуют одинаково на $g(R)$ с одной стороны, то они также действуют одинаково на нем и с другой стороны (предложение 7.2.).

Параграф 8 посвящен изучению решетки конгруэнций полуколец вида $S = R\dot{\cup}U$.

Пусть σ – конгруэнция полукольца $S = R\dot{\cup}U$. Обозначим через σ_R (σ_U) сужение конгруэнции σ на кольце R (на полутеле U). Очевидно, σ_R – кольцевая конгруэнция, σ_U – конгруэнция полутела U.

Лемма 8.1. *Если σ – конгруэнция на полукольце $S = R\dot{\cup}U$ такая, что $u\sigma r$ для некоторых $u \in U$ и $r \in R$, то σ является единичной конгруэнцией.*

Лемма 8.2. *Для произвольных конгруэнций $x, y \in ConS$ полукольца $S = R\dot{\cup}U$ справедливо $x \vee y = x \circ y = y \circ x$.*

Предложение 8.1. *Для любых конгруэнций полукольца $S = R\dot{\cup}U$ выполняются следующие равенства:*

1) $(x \circ y)_U = x_U \circ y_U$;

2) $(x \circ y)_R = x_U \circ y_R$;

3) $(x \cap y)_U = x_U \cap y_U$;

4) $(x \cap y)_R = x_R \cap y_R$.

Предложение 8.2. *Решетка конгруэнций любого полукольцевого дизъюнктного объединения $S = R\dot{\cup}U$ модулярна.*

Предложение 8.3. *Если решетка идеалов кольца R и решетка конгруэнций полутела U дистрибутивны, то решетка конгруэнций полукольца $R\dot{\cup}U$ также дистрибутивна.*

В параграфе 9 изучаются полукольца, близкие по строению с полукольцевыми дизъюнктными объединениями, в которых множество обратимых элементов замкнуто относительно сложения. Для любого полукольца S с 1 определены три расширяющихся по включению подмножества:

$$X(S) = \{s \in S : \forall u \in U(S) \;\; u + s \in U(S)\},$$

$$Y(S) = \{s \in S : \exists u \in U(S) \;\; u + s \in U(S)\},$$

$$Z(S) = \{s \in S : \exists t \in S \;\; t + s \in U(S)\},$$

каждое из которых является подполукольцом в S (предложения 9.2, 9.3, 9.4).

Построены примеры полуколец S, в которых $X(S) \subset Y(S) = Z(S)$, $X(S) = Y(S) \subset Z(S)$ и $X(S) \subset Y(S) \subset Z(S)$ соответственно.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Евгению Михайловичу Вечтомову за постановку задач, за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. Вечтомов, Е. М. Кольца, допускающие полукольцевое расширение при помощи полутела [текст] / Е. М. Вечтомов, М. А. Лукин // Международная алгебраическая конференция: К 100-летию со дня рождения П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина. Тезисы докладов. – Екатеринбург: УрГу, 2005. – С. 105–106 (0,1 п.л., соискателю принадлежит 60 %).
2. Вечтомов, Е. М. Расширения кольца и полутела [текст] / Е. М. Вечтомов, М. А. Лукин // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. – 2005. – Вып. 3. – С. 128–131 (0,3 п.л., соискателю принадлежит 60 %).

3. Лукин, М. А. Дизъюнктное полукольцевое объединение кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 4(16). – С. 138–148 (0,7 п.л.).
4. Лукин, М. А. О строении полутел, состоящих в полукольцевом дизъюнктном объединении с кольцом [текст] / М. А. Лукин // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2006. – Вып. 8. – С. 77–84 (0,5 п.л.).
5. Лукин, М. А. О строении колец, входящих в полукольцевое дизъюнктное объединение с данным полутелом [текст] / М. А. Лукин // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. – Т. 1. – Орел: Орловский гос. ун-т, 2006. – С. 188–191 (0,4 п.л.).
6. Лукин, М. А. Об идеалах и конгруэнциях на полукольцевом объединении кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Математика. Образование. Материалы XV международной конференции. – Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т, 2007. – С. 243–244 (0,1 п.л.).
7. Лукин, М. А. О полукольцах с обратимой суммой обратимых элементов [текст]/ М. А. Лукин // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. – 2007. – Вып. 4. – С. 165–168 (0,3 п.л.).
8. Лукин, М. А. Конгруэнции на полукольцевых объединениях кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2007. – Вып. 9. – С. 50–57 (0,5 п.л.).
9. Лукин, М. А. О полукольцевом объединении кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Международная конференция "Алгебра и ее приложения". Тезисы докладов. – Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2007. – С. 85–86 (0,1 п.л.).
10. Лукин, М. А. Одно описание колец, входящих полукольцевое дизъюнктное объединение с данным полутелом [текст] / М. А. Лукин // Совре-

менная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. – Тамбов: Тамбовский гос. ун-т, 2008. – С. 30–33 (0,35 п.л.).

11. Лукин, М. А. Строение колец, входящих в полукольцевое объединение с данным полутелом [текст] / М. А. Лукин // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. – М.: Изд-во механнико-математического факультета МГУ. – 2008. – С. 157–158 (0,1 п.л.).

Статьи в журналах, рекомендуемых ВАК

12. Лукин, М. А. О полукольцевых объединениях кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Известия вузов. Математика. – 2008. – №12. – С. 76–80 (0,4 п.л.).

13. Вечтомов, Е. М. Полукольца, являющиеся объединением кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин, Е. М. Вечтомов // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63. – Вып. 6. – С. 159–160 (0,2 п.л., соискателю принадлежит 60 %).

Подписано в печать 15 января 2009 г.

Формат 64 × 80/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,0.

Тираж 100 экз. Заказ №128

Отпечатано в ЦДООШ

610002, г. Киров, ул. Ленина, 105, т. (8332) 351503